$$z^3 = (x+iy)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} x^k (iy)^{3-k} = (iy)^3 + 3x(iy)^2 + 3x^2(iy) + x^3$$
$$= -iy^3 \underline{-3xy^2} + 3x^2iy \underline{+x^3}$$

Midtoets Complexe Analyse
03/10/08, 13.15–14.15 uur

$$zi = ix - y$$

1. Waar is de functie $f(z) = \bar{z}^2 + 2\bar{z}$, $z = x + iy$, differentieerbaar? Ga dit na met behulp van de Cauchy-Riemann vergelijkingen.
2. De functie i^z kan gedefinieerd worden door $i^z = e^{z \log i}$. Maak dit expliciet door een keuze voor de logarithme en bepaal dan de afgeleide van i^z.
3. Toon aan dat $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2y$ het reëele gedeelte van een analytische functie is. Bepaal het imaginaire gedeelte van die functie.
4. Laat Γ het in positieve zin doorlopen gedeelte van de eenheidscirkel zijn, lopend van $z = 1$ naar $z = i$. Geef een bovengrens voor de absolute waarde van de contourintegraal:
$$\int_\Gamma e^{1/z}\,dz.$$
Aanwijzing: geef een bovengrens voor $|e^{1/z}|$ op Γ.
5. Bereken met behulp van Cauchy's gegeneraliseerde integraalstelling
$$\int_\Gamma \frac{\sin z}{(z+i)^3}\,dz,$$
waarbij Γ de eenmaal in positieve zin doorlopen cirkel $|z| = \pi$ is.

$$\frac{d}{dz_0} \int_\Gamma \frac{f(z_0)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \cancel{\int} -(n+1)$$

$$\frac{d}{dz_0} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \frac{d}{dz_0} \int f(z)\,(z-z_0)^{-1}\,dz$$

$2\pi i f(z_0)$

$$= \int f(z) \cdot -1(z-z_0)^{-2} \cdot -1 \, dz$$

$\cancel{2\pi i}$

$$= \int \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} = 2\pi i f^{(1)}(z_0)$$

$$\frac{\sin z}{(z+i)^3} = \frac{A_0^{(1)}}{(z+i)^3} + \frac{A_1^{(1)}}{(z+i)^2} + \frac{A_2^{(1)}}{(z+i)} + \cancel{A}$$

$$A_2^{(1)} = \lim_{z\to -i} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz} \frac{\sin z}{(z+i)^3} \cdot (z+i)^3 = \lim_{z\to -i} -\sin z = -\sin(i) = \sin i \tfrac{1}{2}$$